



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C9 - Eq. de Maxwell complexes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times [\text{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}]$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{(\vec{\nabla} \times \vec{E})e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{-\vec{B} \frac{\partial}{\partial t}(e^{j\omega t})\}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{(\vec{\nabla} \times \vec{E})e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{e^{j\omega t} j\omega \vec{B}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega \vec{D} \end{aligned}} \quad \text{reel} \leftrightarrow \text{phaseur} \quad \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

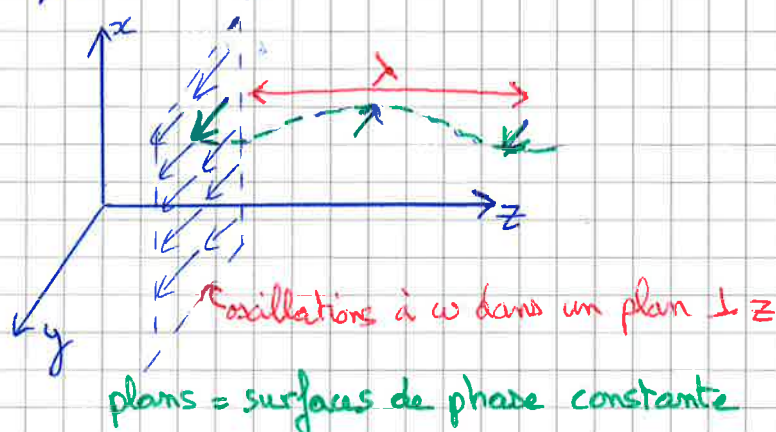
C10 - Exemple: onde plane monochromatique

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{y} E_0 \cos(\omega t - \beta z) \Rightarrow \vec{E} = E_0 \hat{y} e^{-j\beta z}$$

nombre d'onde

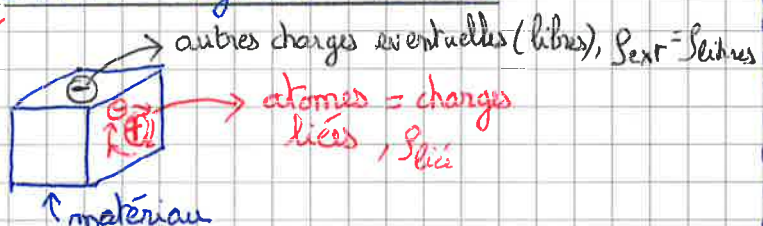
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{pulsation fréquentielle}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{longueur d'onde}$$



(iv) Relations constitutives

C11 - Charges libres et liées



$\Rightarrow$ la présence de $\vec{E} \neq 0$ implique en général $\rho_{liée} \neq 0 \Rightarrow \rho_{liée} = \rho_{ind}$ est induite par $\vec{E}$

$\Rightarrow$ (i) $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ind} + \rho_{ext}$; (ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$; (iii) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; (iv) $\vec{\nabla} \times \frac{\vec{D}}{\mu_0} = \vec{j}_{ind} + \vec{j}_{ext}$

Dans C13, on va simplifier les équations de Maxwell (i-iv) en "cachant" ρ_{ind} et $\vec{j}_{ind}$. Pour cela, on va généraliser les définitions de $\vec{D}$ et $\vec{j}$. On aura besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant.

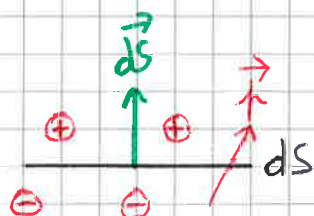
C12 - Soit un champ $\vec{C}(\vec{r})$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$ en tout point $\vec{r}$. Alors, il existe un champ $\vec{m}(\vec{r})$ tel que

$$\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{m}$$

C13 - Définitions

$\vec{p} = N q \vec{d}$ = moment dipolaire par unité de volume

nombre d'atomes par unité de volume charge du noyau séparation des charges



charges traversant $dS = \vec{p} \cdot d\vec{S}$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

* Alors, pour une surface fermée S , la variation de la charge interne est

$$\Delta Q_{\text{ind}} = - \int_S \vec{r} \cdot d\vec{S}. \text{ On attribue } \Delta Q_{\text{ind}} \text{ à une charge volumique } \rho_{\text{ind}}$$

$$\Delta Q_{\text{ind}} = \int_V \rho_{\text{ind}} dV = - \int_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{r} dV \Rightarrow \boxed{\rho_{\text{ind}} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{r}}$$

* De plus, la charge liée se conserve $\frac{\partial \rho_{\text{ind}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{ind}} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_{\text{ind}} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) = 0$

$$\Rightarrow \exists \vec{m} / \boxed{\vec{j}_{\text{ind}} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{m}} \quad \text{magnétisation } \vec{m}$$

Alors

$$(i) \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{r}) = \rho_{\text{ext}} \quad \leftarrow \text{nouveau } \vec{D}$$

$$(ii) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$(iii) \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \vec{\nabla} \times (\frac{\vec{D}}{\mu_0} - \vec{m}) = \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{r})}{\partial t} \quad \leftarrow \text{nouveau } \vec{H}$$

$\Rightarrow$ c'est comme dans le vide
sauf que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{r}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{m})$$

$$(\rho_{\text{ext}}, \vec{j}_{\text{ext}}) \rightarrow (\rho_{\text{ext}}, \vec{j}_{\text{ext}})$$

C14

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{r} \text{ mais } \vec{r} \text{ est induit par } \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

ϵ_r permittivité relative / constante diélectrique

$\rightarrow$ susceptibilité électrique de l'atome
(modèle linéaire simple)

$\Rightarrow$ les charges liées ne font que modifier ϵ_0 en $\epsilon_0 \epsilon_r$ [F/m]
("augmente la capacité du vide")



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{m}) \quad \text{De même, on suppose } \vec{m} = \chi_m \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

μ_r perméabilité relative

$\Rightarrow$ les charges liées peuvent aussi modifier μ_0 en $\mu_0 \mu_r$ [H/m]
("augmente la inductance du vide")

C15 Les équations donnant $(\vec{D}, \vec{B})$ à partir de $(\vec{E}, \vec{H})$ sont les relations constitutives du milieu.

* vide $\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases}$

* diélectrique $\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases}$

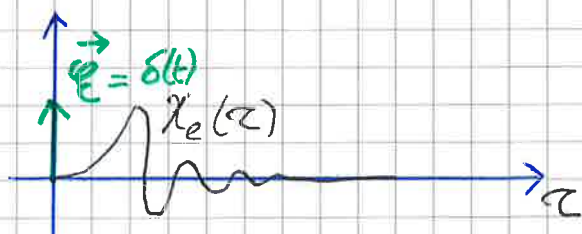
* magnétique $\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{cases}$

* dispersif temporel $\begin{cases} \vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E} \\ \vec{B} = \mu(\omega) \vec{H} \end{cases} \quad (\text{phasesurs})$

ou $\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon_0 (1 + \chi_e(t-t')) \vec{E}(t') dt' \quad (\text{réel})$

idem pour $\vec{B}(t)$

$\swarrow$ réponse impulsionnelle de $\vec{D}/\vec{E}$



$\rightarrow$ dispersion temporelle
= retard de polarisation
(inertie de l'atome)



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

* dispersif spatial

$$\vec{D}(t) = \vec{D}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t \int_V \epsilon_0 (1 + \chi_e(t-t', \vec{r}-\vec{r}')) \vec{E}(t', \vec{r}') dt' d\vec{r}' \quad (\text{réel})$$

↑
la polarisation en $\vec{r}$ dépend aussi
du champ en d'autres points $\vec{r}'$
⇒ réponse non-locale

$$\vec{D} = \epsilon(\omega, \vec{k}) \vec{E} \quad (\text{phaseurs})$$

* anisotrope

$$\begin{cases} \vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \vec{E} \\ \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \vec{H} \end{cases} \rightarrow \text{matrices}$$

* bi-anisotropes

$$\begin{cases} \vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \vec{E} + \underline{\underline{\chi}} \vec{H} \\ \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \vec{H} + \underline{\underline{\chi}} \vec{E} \end{cases}$$

* général

$$(\vec{D}, \vec{B}) = f(\vec{E}, \vec{H}, \omega, t, \vec{k}, \dots)$$

→ pas forcément linéaire